Plus courts chemins

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

Plan

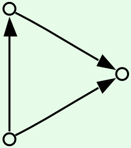
Plan

1. Graphes orientés
2. Plus court chemin
3. DAG : l'algorithme de Bellman
4. Poids positifs : l'algorithme de Dijkstra

Graphe orienté

Graphe orienté : $G = (V, A)$ où

- V est un ensemble fini
- A est un ensemble de couples d'éléments de V



couple ordonné : $uv \neq vu$ [1]

A est l'ensemble des **arcs** du graphe

1. Formellement l'arc uv devrait s'écrire (u, v)

Graphe orienté

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. En orientant toutes les arêtes de G, combien de graphes différents peut-on créer ?

Graphe orienté

Pour un sommet $u \in V$

- $d^-(u) = |\{v / vu \in A\}|$ est le **degré entrant** de u [*in-degree*]
- $d^+(u) = |\{v / uv \in A\}|$ est le **degré sortant** de u [*out-degree*]

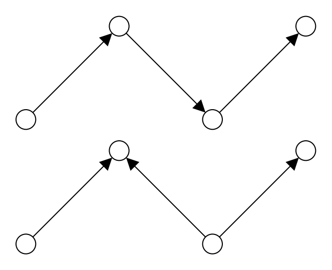
- si $d^-(u) = 0$ alors u est une **source** [*source*]
- si $d^+(u) = 0$ alors u est un **puits** [*sink*]

$$\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |A|$$

Graphe orienté

Chemin : suite de sommets $(x_0, x_1 \ldots x_k)$ où $x_i x_{i+1} \in A$

- $x_0 x_k$-chemin
- **longueur d'un chemin** = nombre d'arcs = k
- un chemin est orienté



✔ chemin

✘ pas un chemin

Circuit : Chemin dont les deux extrémités sont le même sommet

Graphe orienté

$x \rightsquigarrow y$: il existe un chemin de x à y

La relation $\rightsquigarrow$ n'est pas symétrique

$\exists x, y \in V$ tels que $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$
$\Leftrightarrow$
G contient un circuit

Un graphe est **fortement connexe** si et seulement s'il existe un chemin entre chaque paire de sommets : $\forall x, y \in V, x \rightsquigarrow y$

Graphe orienté pondéré

Graphe orienté pondéré $G = (V, A, w)$:

- graphe orienté $G = (V, A)$
- muni d'une fonction de poids sur les arcs : $w : A \to \mathbb{R}$
  [*weighed directed graph*]

Longueur d'un chemin : somme des poids des arcs du chemin

Plan

Plus courts chemins

Les problèmes de plus courts chemins $G = (V, A, w)$

(P1) Plus courts chemins entre deux sommets donnés

Soient s et t deux sommets de G. Trouver un chemin de longueur minimum entre s et t dans G.

(P2) Plus courts chemins à partir d'un sommet

Soit s un sommet de G. Pour tous les sommets v de G, trouver un chemin de longueur minimum entre s et v dans G.

(P3) Plus court chemin entre chaque paire de sommets [2]

Pour chaque paire de sommets u, v de G, trouver un chemin de longueur minimum entre u et v dans G.

2. problème de routage

Plus courts chemins

(P2) permet de résoudre **(P1)** et **(P3)**

Pour **(P3)**, voir l'algorithme de Floyd[3]

3. non étudié dans ce cours

Plus court chemin

Distance entre s et t :

- plus petite longueur d'un st-chemin
- $d(s, t)$

longueur d'un plus court chemin = distance entre les extrémités

Plus courts chemins

Les problèmes de plus courts chemins (reformulation) [4]

$G = (V, A, w)$

(P1) Plus courts chemins entre deux sommets donnés

Trouver la distance entre s et t dans G : $d(s, t)$.

(P2) Plus courts chemins à partir d'un sommet

Trouver la distance entre s et tous les sommets de G :
$d(s, v), \quad \forall v \in V$.

(P3) Plus court chemin entre chaque paire de sommets

Trouver la distance entre chaque paire de sommets de G :
$d(u, v), \quad \forall u, v \in V$.

4. "Le chemin le plus court d'un point à un autre est la ligne droite, à condition que les deux points soient bien en face l'un de l'autre." Pierre Dac

Plus courts chemins

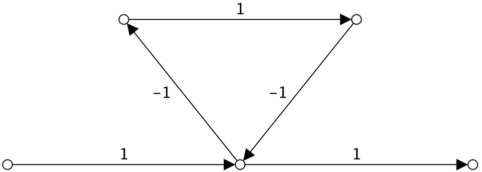
Y a-t-il toujours un plus court chemin ?

Donnez des exemples de graphes pour lesquels, il n'y a pas de plus court chemin entre deux sommets donnés.

Par convention, lorsqu'il n'y a pas de *st*-chemin, $d(s, t) = +\infty$

S'il existe un *st*-chemin, alors, il existe un plus court *st*-chemin élémentaire

Circuit absorbant : circuit de longueur strictement négative



Plus courts chemins

Problème des plus courts chemins bien défini si

- soit on cherche un chemin élémentaire
- soit les poids sont positifs
- soit le graphe ne contient pas de circuit

(P2) Plus courts chemins à partir d'un sommet

Trouver la distance entre s et tous les sommets de G.

Plus courts chemins

Principe de sous-optimalité

Dans un graphe orienté pondéré $G = (V, A, w)$, soit P un plus court chemin de s vers x. Alors, en notant x' le prédécesseur de x dans ce chemin, le sous-chemin de P qui va de s à x', noté $P[s, x']$ est un plus court chemin de s vers x'.

- Soit Q un sx'-chemin
- Q suivi de $x'x$ est un sx-chemin.
- Puisque P est un plus court sx-chemin,
  $w(P) = w(P[s, x']) + w(xx') \leq w(Q) + w(xx')$
- d'où $w(P[s, x']) \leq w(Q)$.
- donc $P[s, x']$ est un plus court (s, x')-chemin.

Plus courts chemins

Principe de sous-optimalité

- Plus généralement : les sous-chemins des plus courts chemins sont des plus courts chemins
- Conséquence : structure d'arborescence (arbre enraciné) des plus courts chemins

Plus courts chemins : Algorithmes

Intuition de l'algorithme

- On maintient des distances provisoires, $\lambda(v)$ (poids d'un chemin de s à v trouvé à un certain stade de l'exécution de l'algorithme)
  et une arborescence π décrivant ces chemins
- lorsque $\lambda(u) + w(uv) < \lambda(v)$ pour un arc uv, alors on a trouvé un meilleur chemin jusqu'à v et donc on met à jour $\lambda(v)$ et π

Plus courts chemins : Algorithmes

- π n'est modifié que s'il y a une amélioration stricte, jamais pour changer et trouver un autre chemin de même poids
- à tout moment dans l'algorithme, $\lambda(v)$ est la longueur d'un *sv*-chemin existant

$\lambda(v) \geq d(s, v)$ pour tout sommet v.

Poids unitaires

Plus courts chemins dans un graphe non pondéré

Poids unitaires : $w(a) = 1 \qquad \forall a \in A$

- L'algorithme BFS trouve les plus courts chemins
- c'est le meilleur et le plus simple algorithme
- revoir cours sur cheminement pour la preuve (certificat)

Poids unitaires

Plus courts chemins dans un graphe non pondéré
Certificat $d(s,t) = k$

- $d(s,t) \leq k$: exhiber un *st*-chemin de longueur k
- $d(s,t) \geq k$?

Poids unitaires

Algorithme 1 : BFS

Données : Un graphe orienté $G = (V, A)$ et un sommet s de G

Résultat :

- une arborescence de plus courts chemins d'origine s
- Les distances $d(s, v)$ de s à tous les sommets v de G

$\lambda(v) \leftarrow +\infty \quad \forall v$ sommet de G $\qquad F$ une file vide

Ajouter s à F $\qquad \lambda(s) \leftarrow 0$

tant que *F est non vide* **faire**

  Défiler un sommet de F : v

  pour *Pour chaque sommet w tel que $vw \in A$* **faire**

    si $\lambda(w) = +\infty$ **alors**

      Enfiler w dans F

      $\pi(w) \leftarrow v$

      $\lambda(w) \leftarrow \lambda(v) + 1$

retourner λ, π

Poids unitaires

Plus courts chemins dans un graphe non pondéré

Certificat $d(s,t) \geq k$

- Si S est une st-coupe alors chaque chemin de s à t contient au moins une arête sortante de S ($uv \in A$ avec $u \in S$ et $v \notin S$)
- Si on a une famille de k st-coupes dont les ensembles d'arêtes sortantes sont disjointes deux-à-deux, alors, $d(s,t) \geq k$
- BFS fournit une telle famille :
  $S_i = \{v \in V / \lambda(v) \leq i\}$ pour $i = 0, 1 \dots k-1$
  - st-coupes : $\lambda(s) = 0$ donc $s \in S_i$, $\lambda(t) \geq k$ donc $t \notin S_i$,
  - disjointes : Si $uv \in A$ alors $\lambda(v) \leq \lambda(u) + 1$

Poids unitaires

Généralisation

- Idée pour encoder un poids entier positif p : subdiviser un arc en p arcs (bonne idée ?)
- Idée pour encoder un poids négatif : personne ne l'a trouvée

$\Rightarrow$ Algorithmes adaptés

Plan

1. Graphes orientés
2. Plus court chemin
3. DAG : l'algorithme de Bellman
4. Poids positifs : l'algorithme de Dijkstra

Graphe sans circuit

Graphe sans circuit

- *Directed Acyclic Graph* ou DAG
- Utilisé en programmation dynamique (états associés à une formule de récurrence)

Décrivez un graphe qui n'a ni source, ni puits.

Un DAG a toujours une source et un puits [5]

preuve ? (algorithmique, par contre-exemple maximal)

5. rappel : le nombre de sommets est fini

Graphe sans circuit

Propriété

Un graphe est sans circuit si et seulement si il admet un ordre topologique.

- Un ordre $v_1 = s, \ldots, v_n$ des sommets est topologique si tous les arcs sont de la forme $v_i v_j$ avec $i < j$.
- l'algorithme DFS permet d'obtenir un ordre topologique en temps linéaire. (Fournier, page 216)
- autre algorithme ?

Algorithme de Bellman

Algorithme 2 : Plus court chemin dans un DAG

Données : un graphe orienté valué G sans circuit et un sommet s

Résultat : une arborescence de plus courts chemins d'origine s

Soit $v_1, v_2 \ldots, v_n$ un ordre topologique des sommets de G

Pour tout sommet v, $d(v) \leftarrow \infty$

$d(s) \leftarrow 0$

pour $k = 1$ **à** n **faire**

  Pour chaque sommet v tel que $v_k v \in A$

  si $d(v) > d(v_k) + w(v_k v)$ **alors**

    $d(v) \leftarrow d(v_k) + w(v_k v)$

    $\pi(v) \leftarrow v_k$

Algorithme de Bellman

Extensions

- Plus long chemin : chemin orienté dont le poids est maximum : opposé des poids.
- Plus sûrs chemins : logarithme des poids.

cf feuille d'exercice

Plan

Algorithme de Dijkstra

Algorithme de Dijkstra

- Graphe avec des poids **positifs**
- garantit qu'il n'y a pas de circuit négatif

Algorithme de Dijkstra

Algorithme de Dijkstra : idées

À chaque étape :

- $V = S \cup V \backslash S$
- Si $v \in S$, $\lambda(v) = d(s, v)$
- Si $v \notin S$, $\lambda(v) \geq d(s, v)$
  $\lambda(v) =$ longueur d'un plus court *sv*-chemin qui n'utilise que des sommets de S.
- Le sommet suivant t qui rentre dans S : valeur de λ minimale.
- Puis mise à jour des voisins de t

Algorithme de Dijkstra

Dijkstra(s)

Données : Un graphe $G = (V, A, w)$ avec des poids positifs et un sommet s de G

Résultat : Les distances de s à tous les sommets de G

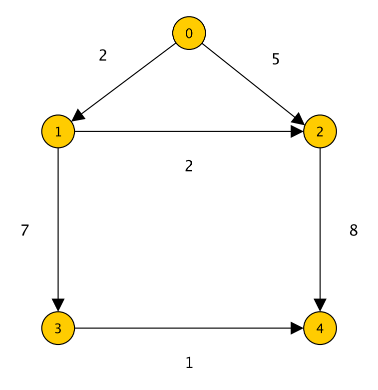
pour *v sommet de G* **faire**
  $\lambda(v) \leftarrow \infty$

$S \leftarrow \emptyset \quad \lambda(s) \leftarrow 0$

tant que $S \neq V$ **faire**
  $t \leftarrow$ un sommet de $V \setminus S$ tel que $\lambda(t)$ soit minimum
  $S \leftarrow S \cup \{t\}$
  tant que *il existe $v \notin S$ avec $tv \in A$* **faire**
    $\lambda(v) = \min(\lambda(v), \lambda(t) + w(tv))$

retourner λ

Algorithme de Dijkstra



valeurs de λ $s = 0$

0	1	2	3	4
0	∞	∞	∞	∞
0	2	5	∞	∞
0	2	4	9	∞
0	2	4	9	12
0	2	4	9	10

Algorithme de Dijkstra

1. *tout s'exécute correctement*
2. *en un nombre fini d'étapes*
   - $S \subset V$ et à chaque étape $|S|$ augmente de 1
3. *en cas d'arrêt, on obtient l'objet souhaité*
   - A démontrer : $\lambda(v) = d(s, v)$ pour tout $v \in S$

Algorithme de Dijkstra

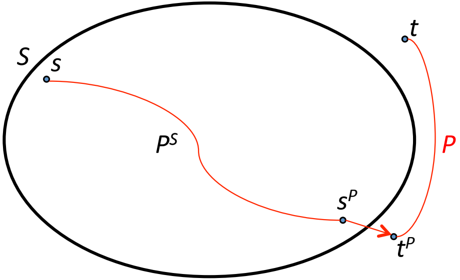
Preuve par récurrence que $\lambda(v) = d(s, v)$ pour tout $v \in S$

- Vrai pour s (trivial)
- On suppose que c'est vrai à l'itération $k - 1$.
- On démontre que la propriété est maintenue à l'itération suivante
  c'est-à-dire, $\lambda(t) = d(s, t)$ lorsque t est ajouté dans S

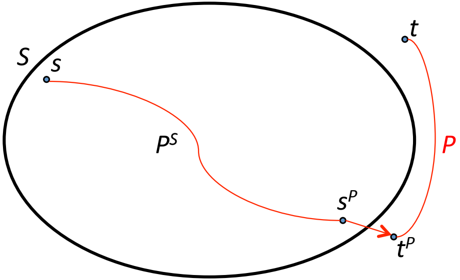
Algorithme de Dijkstra

Juste avant l'ajout de t dans S,

- soit P un chemin quelconque de s à t
- Soit t^P le premier sommet de P non dans S (existe car $s \in S$ et $t \notin S$)
- Soit s^P le prédécesseur de t^P dans P
- Soit P^S le sous chemin de P de s à s^P



Algorithme de Dijkstra



$w(P) \geq w(P^s) + w(s^P t^P)$

P^S plus l'arc $s^P t^P$ sous chemin de $P \geq \lambda(s^P) + w(s^P t^P)$

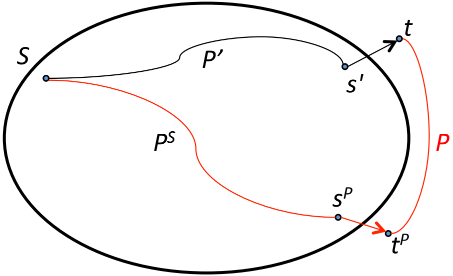
$\lambda(s^P) = d(s, s^P)$ par l'hypothèse de récurrence $\geq \lambda(t^P)$

mis à jour lorsque l'arc $s^P t^P$ a été vu $\geq \lambda(t)$

choix du λ minimum hors de S

Algorithme de Dijkstra

Il faut encore montrer que $\lambda(t) \geq d(s,t)$



- $\exists s' \in S$ tel que $\lambda(t) = \lambda(s') + w(s't)$
- Soit P' un plus court chemin de s à s' de longueur $\lambda(s')$ (par hypothèse de récurrence)
- $\lambda(t)$ est la longueur du chemin composé de P' augmentée de $w(s't)$. Donc $\lambda(t) \geq d(s,t)$

Donc lorsque t est ajouté à S, on a $\lambda(t) = d(s,t)$

Algorithme de Dijkstra

Remarques

- Si on tombe dans l'algo sur t avec $\lambda(t) = \infty$ est-ce que ça vaut le coup de continuer ?
- extension graphe non orienté avec longueurs positives

Donnez un exemple de graphe sans circuit absorbant où l'algorithme de Dijkstra ne donne pas les plus courts chemins.

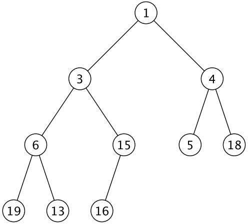
Comment coder **efficacement** l'algorithme de Dijkstra ?

- $=$ comment enlever rapidement l'élément de λ minimum ?
- $\Rightarrow$ Structure de données : **tas binaire** [*Binary heap*]
  - permet d'encoder des ensembles, d'ajouter des éléments, de retirer l'élément de plus petite étiquette...
  - ex : heap sort

Tas binaires

Tas binaire : arbre enraciné qui vérifie les propriétés suivantes

- c'est un arbre binaire parfait :
  - Les nœud du dernier niveau n'ont pas de fils
  - Les nœud de l'avant dernier niveau ont au plus deux fils
  - Tous les autres nœud ont deux fils
  - si le dernier niveau n'est pas totalement rempli, alors il est rempli de gauche à droite
- c'est un tas :
  - chaque nœud contient une étiquette
  - l'étiquette du père est plus petite que les étiquettes de ses fils

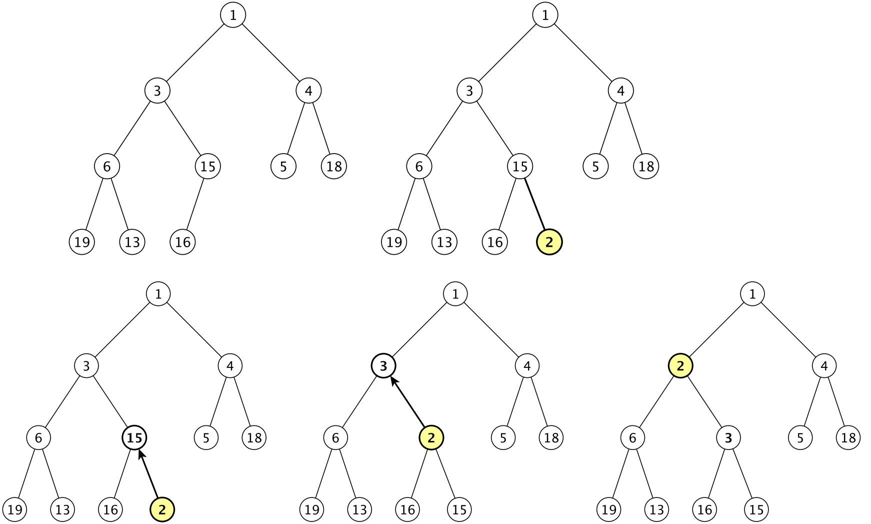


Tas binaires

Tas binaires : opérations

- **ajouter** un élément
  - L'élément s est d'abord rajouté en dernière position au tas. Puis, tant qu'il n'est pas la racine et qu'il est plus petit que son père, on échange les positions entre s et son père.

Tas binaire : ajouter

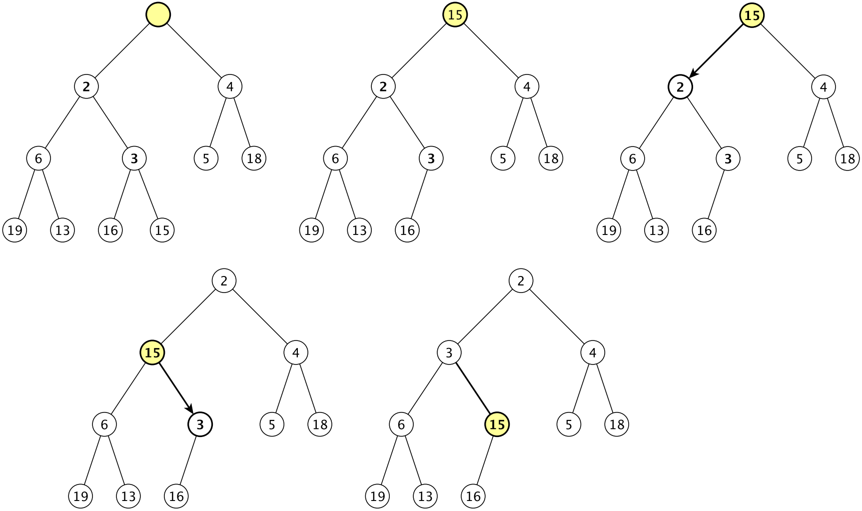


Tas binaires

Tas binaires : opérations

- **ajouter** un élément
  - L'élément s est d'abord rajouté en dernière position au tas. Puis, tant qu'il n'est pas la racine et qu'il est plus petit que son père, on échange les positions entre s et son père.
- **retirer**
  - renvoie le sommet racine du tas, qui correspond au sommet qui a la plus petite valeur.
  - enlève ce sommet du tas
  - met le tas à jour : met à la racine le dernier sommet du tas puis tant que ce sommet a des fils et qu'il est strictement supérieur à ses fils, échanger sa position avec celle du plus petit de ses fils.

Tas binaire : retirer



Tas binaires

Tas binaires : opérations

- **diminuer** l'étiquette d'un nœud
  Il faut faire attention de maintenir la structure de tas en faisant éventuellement remonter le nœud qui a été modifié dans l'arbre comme lorsqu'on ajoute un sommet.

Montrer que les trois opérations maintiennent la structure de tas binaire.

Tas binaires

Tas binaires : complexité

Le nombre d'opérations de chaque fonction est borné par la hauteur de l'arbre.

Arbre binaire complet $\Rightarrow$
profondeur $\leq$ logarithme du nombre de nœuds.

Chaque opération sur le tas binaire a donc une complexité $O(\log n)$
L'algorithme de Dijkstra a donc une complexité [6]
$O((|V| + |E|) \log |V|)$

6. $|V| *$retirer$+(|V| + |E|)*$ajouter/diminuer

Conclusion

- pas de circuit : Algorithme de Bellman
- couts positifs : Algorithmes de Dijkstra
- Algorithme de Bellman Ford : caractérisation des graphes orientés pondérés sans circuit absorbant.