Graphes

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

Plan

Plan

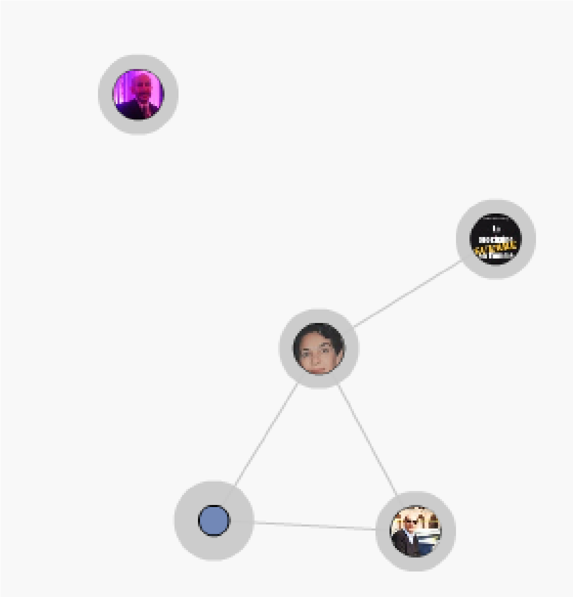
Modélisation

L'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique

Modéliser avec des graphes

- une ensemble d'objets homogènes (étudiants, employés, machines, usines, carrefours...)
- les liens entre ces objets (est plus habile, est dans le même atelier, collabore avec, est relié par une route...)

Des graphes de tous les jours : réseau Facebook



Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin

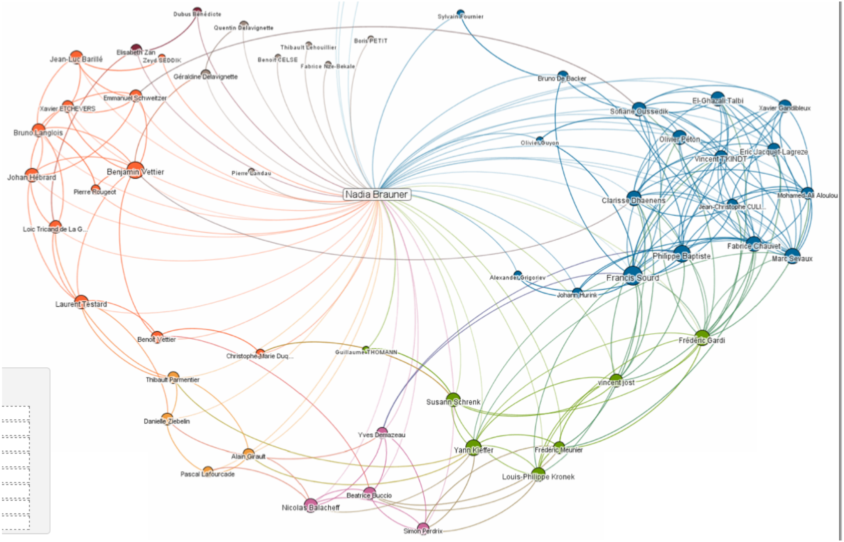
Your Network of Trusted Professionals

You are at the center of your network. Your connections can introduce you to 1,083,000+ professionals — here's how your network breaks down:

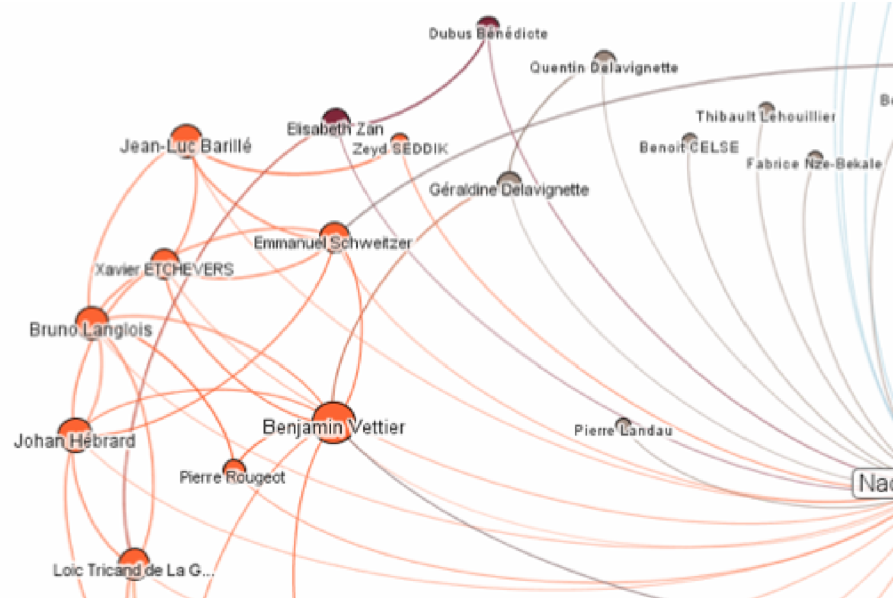
1	**Your Connections** Your trusted friends and colleagues	57
2	**Two degrees away** Friends of friends; each connected to one of your connections	10,400+
3	**Three degrees away** Reach these users through a friend and one of their friends	1,072,500+
	Total users you can contact through an Introduction	1,083,000+

3,218 new people in your network since January 23

Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin



Des graphes de tous les jours : réseau Linkedin



Des graphes de tous les jours : transports en communs

Modélisation

Des graphes de la vie courante

- Internet (promenade entre pages web)
- Règles d'un jeu fini (échec, dames. . .)
- Plans des lignes de transport en commun
- Réseau des amis sur Facebook

D'autres graphes

- Molécules chimiques
- Circuits imprimés
- Factorisations d'un nombre

Modélisation

Décrire

- les sommets
- les arêtes, arcs
- la pondération des arcs
- la question associée

Le GPS

- les sommets : carrefours
- les arcs : rues orientées
- la pondération des arcs : longueurs
- la question associée : plus court chemin entre deux sommets

Modélisation

Quelques problèmes concrets

- Cheminement
  - GPS
  - Organisation de projet
  - Procédé de fabrication le plus sûr
- Compatibilité
  - Organisation de sessions d'examens
  - Cuisson de lots dans des fours
- Recherche multicritère de solution dominantes
- Affectation de ressources sur un projet
- Flots
  - Acheminement de pétrole via un réseau d'oléoducs,
  - Fluidification du trafic automobile dans une ville

Modélisation

Quelques problèmes concrets

- Connexité
  - Accessibilité dans un réseau de transport
  - Réseau souterrain du campagnol terrestre 2-connexe
  - Fiabilité dans les réseaux

Plan

Graphes

Graphe fini : $G = (V, E)$ où

- V est un ensemble fini
- E est un ensemble de couples non ordonnés d'éléments de V

Cycle à 3 sommets : $V = \{1, 2, 3\}$ $E = \{12, 23, 13\}$[1]

couple non ordonné : $12 \equiv 21$

1. Formellement E est inclus dans l'ensemble des parties à deux éléments de V et uv devrait s'écrire $\{u, v\}$. Donc $uu \notin E$

Graphes

Terminologie

- G : Graphe [*Graph*]
- V : ensemble des sommets du graphe [*Vertices*]
- E : ensemble des arêtes du graphe [*Edges*]

- **Ordre** du graphe = nb de sommets = $Card(V) = |V|$

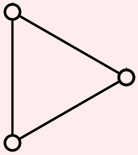
- $n = |V| \qquad m = |E|$

Graphes

Représentation graphique

- V : sommets $\rightarrow$ points
- E : arêtes $\rightarrow$ traits (reliant les points)

Représentation graphique du cycle à 3 sommets



Graphes

Représentation graphique

Dessiner les graphes suivants :

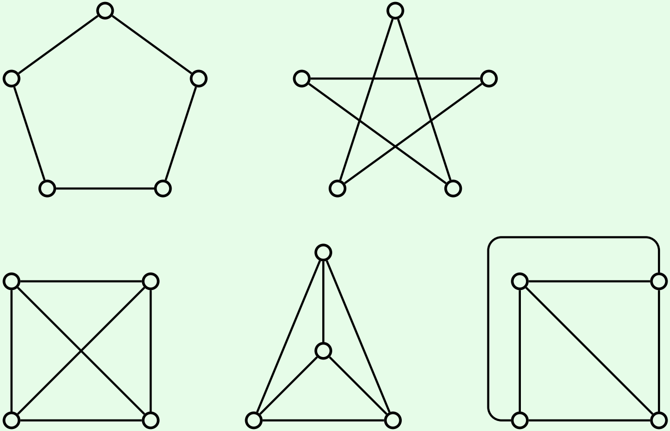
- Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
- Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
- Graphe associé à la situation : Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

(IREM d'Aix-Marseille)

Graphes

Représentation graphique

Est-ce le même graphe ?

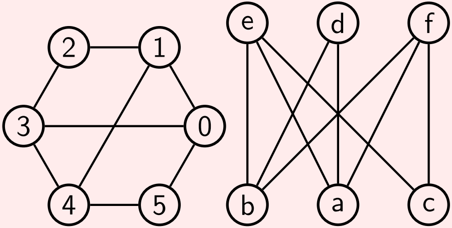


Graphes

G est **isomorphe** à H :

- $\exists$ une bijection $f : V(G) \to V(H)$
- $\forall x, y \in V(G)$, on a $xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$

Bijection entre les sommets qui préserve les arêtes [2]



$1 \mapsto b \quad 2 \mapsto d$
$3 \mapsto a \quad 4 \mapsto e$
$5 \mapsto c \quad 0 \mapsto f$

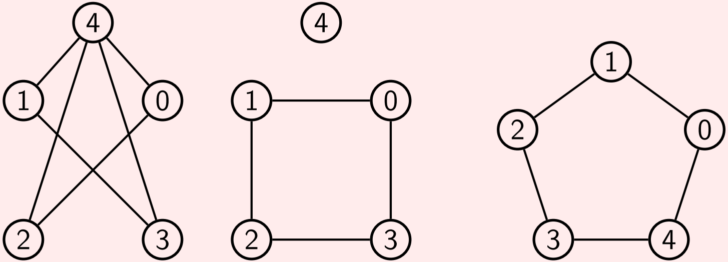
2. bien sur, $G = (V(G), E(G))$. On avait omit jusque là car il n'y avait pas d'ambiguité.

Graphes

$\overline{G}$ est le **complémentaire** de G :

- même ensemble de sommets
- les arêtes de $\overline{G}$ sont les non-arêtes de G :
  $uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(\overline{G})$

Un graphe est **auto-complémentaire**
s'il est isomorphe à son complémentaire

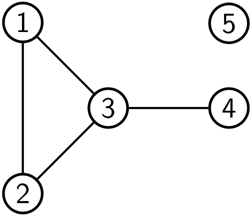


Graphes

Représentation graphique

Graphviz : logiciel de représentation de graphes

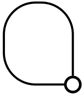
```
graph G
{
 node [shape=circle
    fontname = "Arial"];
 1 -- 3 ;
 2 -- 3 ;
 1 -- 2 ;
 3 -- 4 ;
 5 ;
}
```



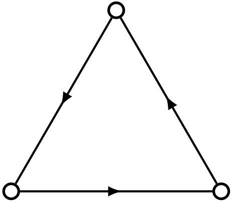
Graphes

Variantes

- **Boucle** : arêtes du type $ii \in E$



- **Graphe orienté** : E contient des couples ordonnés $(12 \neq 21)$

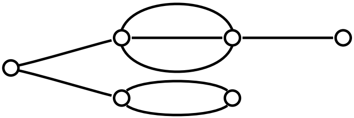


$E = \{$**arcs**$\}$

Graphes

Variantes

- **Multigraphe** : E = collection
  (chaque arête peut apparaître plusieurs fois)



  sinon, graphe simple

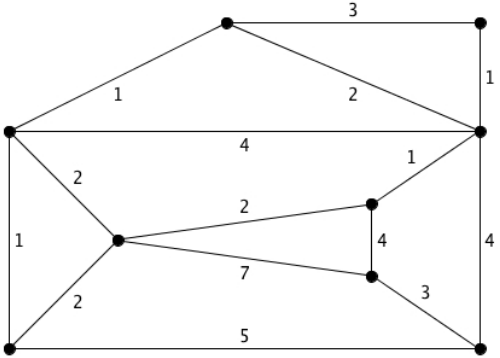
ici, **graphe** = graphe simple, sans boucle, non orienté [3]

3. sauf si explicitement précisé

Graphes

Variantes

- **Graphes étiquetés** (labellisés, pondérés, valués) : informations/valeurs sur les sommets et/ou sur les arêtes



Plan

Degrés

Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

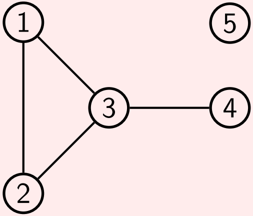
Degrés

- i et j sont les **extrémités** de $ij \in E$
- e est **incidente** à i si i est extrémité de e
- i et j sont **voisins** ou adjacents si $ij \in E$
- $N(u)$, le **voisinage** du sommet u est ensemble des voisins de u

Degrés

Degré d'un sommet $d(v)$: nombre d'arêtes incidentes à v

$$d(v) = |N(v)|$$



$$d(1) = 2 = d(2), \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 1, \quad d(5) = 0$$

- v est **isolé** si $d(v) = 0$

Degrés

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d\}$ et $E = \{ab, ac, ad, bd\}$.

- Quel est l'ordre du graphe ?
- Quels sont les sommets adjacents à d ?
- Combien y-a-t-il d'arêtes incidentes à c ?
- Quel est le degré de d ?

Est-ce qu'il existe un graphe simple avec la séquence de degrés suivante ? s'il existe, trouver un tel graphe. Sinon, expliquer pourquoi.

(a) (1 ; 2 ; 2 ; 4 ; 5 ; 5)
(b) (2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2)
(c) (1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1 ; 1)
(d) (3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 3 ; 5)
(e) (2 ; 2 ; 2 ; 3 ; 3 ; 3)
(f) (0 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5)
(g) (5 ; 5 ; 5 ; 5 ; 2 ; 2)

Degrés

Théorème

Soit $G = (V, E)$ *un graphe. Alors,* $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

chaque arête *uv* contribue à

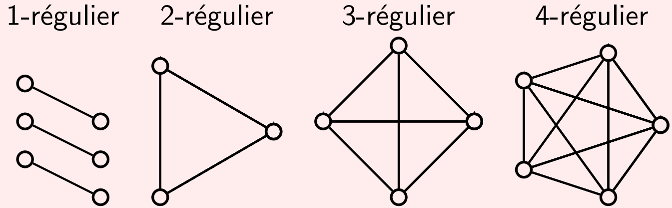
- 1 dans le degré de u
- 1 dans le degré de v

Corollaire

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

Degrés

- G est K-**régulier** si $\quad d(v) = K \quad \forall v \in V$



Graphe complet d'ordre $K + 1$:

- graphe K-régulier à $K + 1$ sommets
- noté K_{K+1}

Existe-t-il des graphes réguliers autres que les graphes complets ?

Degrés

Dessiner K_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Combien K_n a-t-il d'arêtes ?

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.
Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun ;
Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

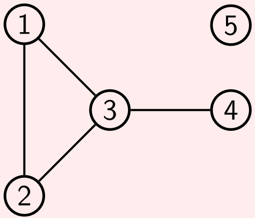
(IREM d'Aix-Marseille)

Plan

Représentations matricielles

Matrice d'adjacence de G : matrice M carrée $n \times n$ binaire

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



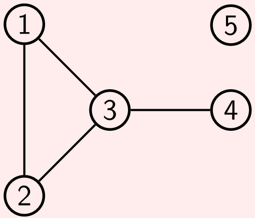
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- M est symétrique ($M_{ij} = M_{ji} \quad \forall ij$)
- diagonale $= 0$

Représentations matricielles

Matrice d'incidence de G : matrice M binaire $n \times m$

$$M_{ie} = \begin{cases} 1 & \text{si le sommet } i \text{ est extrémité de } e \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Exactement deux 1 dans chaque colonne

Représentations matricielles

Graphes orientés

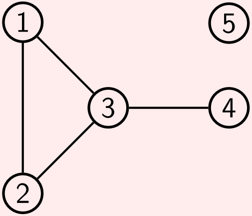
- Mêmes définition mais on doit distinguer *ij* de *ji*
- Utiliser ± 1
- Matrice d'incidence

$$M_{ia} = \begin{cases} 1 & \text{si arc } a \text{ sortant de } i \\ -1 & \text{si arc } a \text{ entrant dans } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Représentation machine des graphes

- **Liste d'adjacence** : tableau de n listes chaînées
  liste dans la case i = liste des voisins de i

- 1 : [2,3]
- 2 : [1,3]
- 3 : [1,2,4]
- 4 : [3]
- 5 : []



Il existe d'autres structures de données pour représenter les graphes

Représentation machine des graphes

Dans une matrice d'incidence, que représente :

- la somme des coefficients d'une ligne ?
- la somme de tous les coefficients de la matrice ?

Dans une matrice d'adjacence, que représente :

- la somme des coefficients de la colonne j ?
- la somme des coefficients de la ligne i ?
- la somme de tous les coefficients de la matrice ?

Quel est le nombre maximum d'arêtes si on a n sommets ?

Représentation machine des graphes

Comparaison

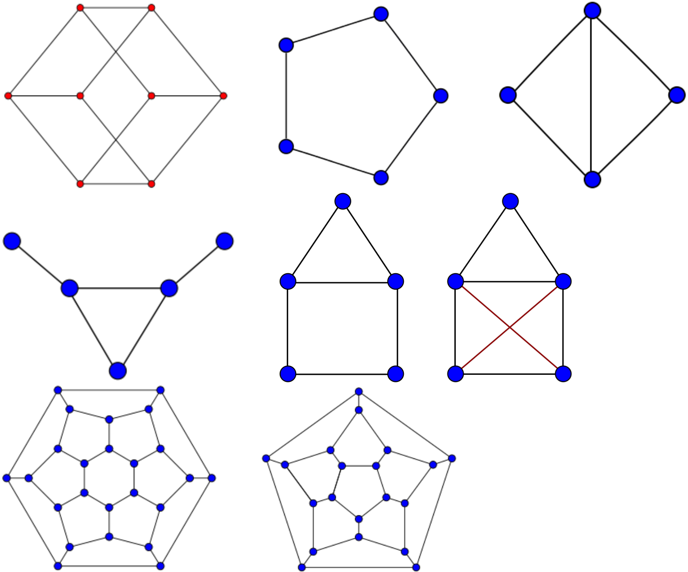
	matrice adjacence	matrice incidence	liste adjacence
mémoire	n^2	$n \times m$	$n + 4m$
peu d'arêtes	–	$++$	$++$
bcp d'arêtes	$++$	–	-
i et j voisins ?	1	m	degré i
i isolé ?	n	m	1
nb d'arêtes ?	n^2	1	n^2

Plan

Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

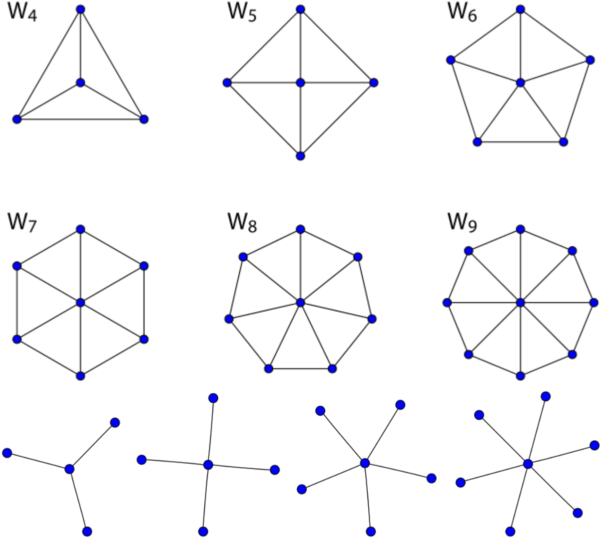
source : wikipedia



Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

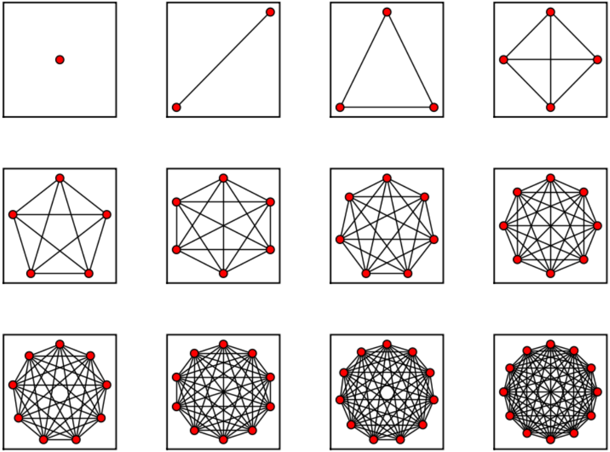
source : wikipedia



Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

source : Wolfram MathWorld



Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

source : Wolfram MathWorld