DIU EIL 2020 – Bloc 5
Retour sur la Complexité

G. Fertin
guillaume.fertin@univ-nantes.fr

Préambule 1/2

Ce qui est présenté ici

- n'est pas formellement dans le programme NSI de Terminale (!)
- doit être vu comme des éléments de réflexion/d'information supplémentaires
- permet une vision plus large des choses
- et permet d'en savoir plus que vos élèves! (en cas de questions "tordues")
- en gros, fait partie de la "culture générale" en algorithmique

Préambule 2/2

Ce que nous verrons dans cette partie

1. La taille des données d'entrée d'un algorithme, et son importance
2. Le monde algorithmique est binaire: un algorithme est soit polynomial soit exponentiel
3. Un algorithme résout un problème, mais qu'est-ce qu'un problème facile ? un problème difficile ?
4. Que fait-on quand un problème est difficile ?

Sommaire

Complexité d'un algorithme

C'est l'évaluation des ressources nécessaires à son exécution

- On s'intéresse généralement:
  - à la complexité en temps de l'algorithme → rapidité/lenteur
  - à la complexité en mémoire de l'algorithme

- Une tendance suffit:
  - Notation $O()$
  - Indépendant de la machine et du langage de programmation
  - Qui reflète assez bien la réalité
  - But: imaginer ce que donne l'algorithme pour de très grandes données

Complexité d'un algorithme

La complexité (en temps/en mémoire) d'un algorithme est une **fonction de la taille des données** d'entrée du problème

Complexité = fonction de la taille des données

Intuition

Un même algorithme sur deux tailles différentes:

- Rendu de monnaie pour une somme de N=11€ vs N=547.253€ (avez-vous la monnaie sur un billet d'1 million ?)
- Recherche de plus courts chemins dans un graphe à $n = 27$ sommets vs $n = 3.000.000$ sommets

C'est quoi, la "taille des données" ?

Intuitivement:

- c'est la taille de l'instance d'entrée
- c'est ce qu'il faut augmenter si on veut "pousser l'algorithme dans ses retranchements"

Retour sur la taille des données

Taille des données (d'entrée d'un algorithme)

- Formellement:

  > Taille des données = Taille d'un **meilleur codage pour ces données**

- Meilleur codage: codage informatique qui prend le moins de place en mémoire

  $\Rightarrow$ en informatique, penser codage binaire!

- Intuitivement (on l'a déjà dit): ce qui va faire augmenter la complexité en temps de l'algorithme

Meilleur codage 1/2

Au fait, le codage binaire est-il le meilleur possible ?

- Supposons avoir codé un entier p en base 2
  $\rightarrow$ longueur $\ell_2 = \lceil \log_2 p \rceil$
- Codons-le maintenant en base b ($b \geq 2$, b est une constante)
  $\rightarrow$ longueur $\ell_b = \lceil \log_b p \rceil$
- Mais $\log_2 p = \log_b p \cdot C$, où $C = \frac{1}{\log_b 2}$
- ...et C est une constante (car 2 et b sont des constantes)
- Conclusion: ℓ_2 et ℓ_b sont les mêmes, à une constante multiplicative près
- Remarque: c'est la même idée que la notation $O(...)$

Meilleur codage 2/2

Conclusion

Toute base constante $b \geq 2$ convient. Continuons donc à travailler en base 2!

Seule exception: base $b = 1$ (codage "bâton", aussi appelé codage **unaire**)

Exemple: $p = 17$

- Base 2: 10001_2 (longueur = 5 bits)
- Base 10: 17_{10} (longueur = 2 chiffres)
- Base 16: 11_{16} (longueur = 2 hexadécimaux)
- Base 1: ||||||||||||||||| (longueur = 17 "bâtons")

Exercice

Taille des données

Quelle est la taille correspondant aux données d'entrée suivantes ?

1. un entier p (ex: problème de primalité d'un nombre)
2. deux entiers p et q (ex: problème du PGCD de deux nombres)
3. un ensemble de n entiers, dont le maximum est M (ex: problème du tri)
4. un texte de longueur n, exprimé sur un alphabet Σ de taille σ (ex: problème de la recherche de motifs)
5. un graphe G à n sommets et m arêtes (ex: recherche d'un plus court chemin entre deux sommets de G)

Solutions 1/2

Taille des données

Quelle est la taille correspondant aux données d'entrée suivantes ?

1. un entier $p \rightarrow \log p$
   - Pourquoi pas $\log_2 p$?
     Réponse: 2 ou autre chose ($b \geq 2$), c'est pareil (voir ci-avant).
     Donc on n'indique plus la base du logarithme
   - Pourquoi pas $\lceil \log_2 p \rceil$?
     Réponse: même idée: si on ne chipote pas pour un écart multiplicatif, on ne chipote pas pour ça non plus!
2. deux entiers p et $q \rightarrow \log p + \log q$
   Mieux! Si on suppose $p \geq q$, on se cale sur le plus grand $\rightarrow$ $2 \log p$
   Voire $\log p$ puisque la constante multiplicative est "offerte"

Solutions 2/2

Taille des données

Quelle est la taille correspondant aux données d'entrée suivantes ?

1. un ensemble de n entiers, dont le maximum est $M \rightarrow n \log M$ (ici, le n n'est pas "offert", car ce n'est pas une constante!)
4. un texte de longueur n, exprimé sur un alphabet Σ de taille σ $\rightarrow n \log \sigma$
5. un graphe G à n sommets et m arêtes $\rightarrow$ plus compliqué: c'est quoi le meilleur codage pour un graphe ?
   - Matrice d'adjacence : n^2
   - Liste d'adjacence: $n + m \log n$ ($\log n$ pour le codage des sommets)

Application 1: le tri

Instance: une liste S contenant n réels

Sortie: les n réels de S triés par ordre croissant

Taille des données ?

- n valeurs, supposons que le plus grand élément soit M
- Taille des données: $n \log M$

Application 1: le tri

Instance: une liste S contenant n réels

Sortie: les n réels de S triés par ordre croissant

Taille des données ?

- Remarque: la valeur de M n'a aucune importance, c'est l'ordre relatif des n valeurs qui compte
- exemple: $S_1 = [8, 4, 7, 6, 5]$ et $S_2 = [8000, 4000, 7000, 6000, 5000]$ se trient de la même façon
- De plus, on admet qu'on peut comparer deux valeurs (même très grandes) en 1 opération
- $\Rightarrow$ la complexité ne dépend pas de M!

On simplifie, et Taille des données $= n$

Application 2: la recherche de motifs

Instance: un texte T de longueur n, un motif M de longueur m

Sortie: les positions d'apparition de M dans T

Taille des données ?

- Alphabet pour exprimer T et M: Σ, de taille σ
- T de longueur $n \rightarrow$ meilleur codage $n \log \sigma$
- M de longueur $m \rightarrow$ meilleur codage $m \log \sigma$
- σ considéré comme constant (ex: codage ASCII)
- $\Rightarrow$ taille des données $= n + m$

Que faut-il conclure de tout ça ?

Taille des données: en résumé

- une valeur $p \rightarrow \log p$
- un nombre constant de valeurs, dont la plus grande est p_{max} $\rightarrow \log p_{max}$
- un ensemble de n valeurs $\rightarrow n$ (ex: tableaux, listes, piles, files, Arbres Binaires de Recherche...)
- un graphe à n sommets et m arêtes $\rightarrow n + m$ (pourtant, on avait dit n^2 ou $n + m \log_n$??? – sera discuté plus loin)

Complexité en mémoire d'un algorithme

Comment mesurer la complexité en mémoire ?

- Complexité en mémoire d'un algorithme = taille prise en mémoire par tout ce qui est stocké quand on exécute l'algorithme:
  - données d'entrée du problème
  - toute donnée supplémentaire stockée au cours de l'exécution
  - toute donnée de sortie (si elle est stockée)

Application: la recherche de motif

Retour sur l'algorithme naïf

```
def recherche_naive(T,M):
    n=len(T)
    m=len(M)
    for i in range (n-m):
        j=0
        while j<m and T[i+j]=M[j]:
            j+=1
        if j==M:
            print("Motif trouvé à la position ",i)
```

Application: la recherche de motif

Retour sur l'algorithme naïf

Complexité en mémoire de l'algo naïf

- T de longueur $n \rightarrow n \log \sigma$
- M de longueur $m \rightarrow m \log \sigma$
- variable $i \rightarrow \log n$
- variable $j \rightarrow \log m$

$\Rightarrow$ Au total: $(n+m) \log \sigma + \log n + \log m$

Complexité en mémoire d'un algorithme

En résumé

Complexité en mémoire:

- plus simple à calculer que la complexité en temps
- moins crucial de nos jours
- pour la petite (grande?) histoire:

  Apollo11 en 1969: 72Ko de mémoire morte + 4Ko de mémoire vive

  Les temps ont bien changé!

Sommaire

p est-il premier ?

Un algorithme possible:

```
booleen premier = VRAI
entier i = 2

Tant que premier = VRAI et i < p faire
   Si i divise p alors
      premier = FAUX
   FinSi

   i = i+1
FinTantQue

return premier
```

p est-il premier ?

Analyse de l'algorithme

- Taille des données: $t = \log p$
- Complexité de l'algorithme: $O(p)$
- $\rightarrow$ cette complexité est exponentielle en t car $p = 2^t$ (si on choisit la base 2)
- Exemple: $p = 16.777.216$ et $t = 24$ (toujours en base 2)
- L'écart entre le codage bâton et le codage binaire est exponentiel!

Remarque: on peut améliorer l'algorithme en remplaçant $i < p$ par $i \leq \sqrt{p}$ dans le TantQue

- car si $p = a \cdot b$, alors $\min\{a, b\} \leq \sqrt{p}$
- cela dit, ça ne change rien! $\sqrt{p} = 2^{\frac{t}{2}}$ reste exponentiel en t

Quel est le PGCD de p et q ?

L'algorithme d'Euclide (en supposant $p \geq q$ – sinon, on échange):

```
Tant que q != 0 faire      %%% "!=" veut dire "différent"
     t = q
     q = p mod q
     p = t
FinTantQue

Retourner p
```

- Taille des données: $t = \log p$
- Nombre d'itérations du Tant Que: $O(\log p)$
- Donc la complexité est polynomiale en t. Ouf!

Rendu de monnaie 1/3

Rappel

- But: Obtenir un certain entier N en additionnant un minimum d'entiers pris, avec répétition, parmi un ensemble fini $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$
- N : la monnaie à rendre
- $p_1, p_2, \ldots, p_k$: les valeurs faciales des pièces
- Suppositions:
  - $p = 1$ (évite le cas "impossible d'obtenir la valeur N")
  - $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$
  - on a autant de pièces que l'on veut

Rendu de monnaie 2/3

Algorithme de Programmation Dynamique

- Idée: remplir une table $R[S, i]$ pour tous $0 \leq S \leq N$ et $0 \leq i \leq k$
- $R[S, i] =$ nombre minimum de pièces dont la somme fait S, en n'utilisant que les pièces $p_1, p_2 \ldots, p_i$
- Pour le reste, voir les derniers transparents de la Séance 4 du Bloc 5

Rendu de monnaie 3/3

Analyse

- Taille des données $\log N + k \log p_k$
- Complexité de l'algorithme de Prog. Dyn.: $O(N \cdot k)$
- Problème: N vs $\log N$: cet algorithme est exponentiel en la taille des données
- Rem: l'algorithme de Prog. Dyn. est dit pseudopolynomial (càd polynomial si on utilisait le codage bâton)

Alors, tout s'écroule ?

Flashback

- Quid du problème du sac à dos ?
  Réponse: même problème que le Rendu de monnaie (algorithme pseudopolynomial)
- Quid de la distance d'édition ? (voir Séance 4 du Bloc 5)
  Réponse: OK, car complexité en $O(n_1 n_2)$ et taille des données $n_1 \log \sigma + n_2 \log \sigma$ (voire $n_1 + n_2$)

Pour finir sur la taille des données

Retour sur les graphes

- les algorithmes de graphes que l'on a vus sont polynomiaux en n et m (ex: $O(n+m)$)
- taille des données: $n + m \log_n$ en liste d'adjacence
- $\rightarrow$ pas de problème! (n et m apparaissent tous deux, et pas au logarithme)
- matrice d'adjacence: n^2. Convient aussi car $m \leq n^2$ (donc m est "capté" par le n^2)
- on simplifie encore en disant que $n+m$ est représentatif de la taille des données (et indépendant de la structure!)
- Autre façon de voir: il faut bien stocker les n sommets et les m arêtes!

Pourquoi opposer Polynomial à Exponentiel ?

n = taille des données

Rappels

- Exponentielle : toute fonction en $O(c^n)$ (c=constante, $c > 1$)
- Polynomiale : toute fonction en $O(n^{c'})$ (c'=constante)
- Toute fonction exponentielle domine toute fonction polynomiale

En ce qui concerne la complexité des algorithmes, on cherche à éviter l'exponentielle

Pourquoi éviter l'exponentielle ? 1/3

Exemple illustratif

- n=taille des données
- $f(n)$=nombre d'opérations=complexité en temps
- une opération prend 1 micro-seconde (μs)= 10^{-6}s
- 6 algorihmes, chacun de complexité différente

n/f(n)	n	n^2	n^3	2^n	3^n	$n!$
10	$10\mu s$	$0.1ms$	$1ms$	$1ms$	$59ms$	$3.63s$
20	$20\mu s$	$0.4ms$	$8ms$	$1s$	58 min	77094 ans
40	$40\mu s$	$1.6ms$	$64ms$	12.73 j	385253 ans	$2.58 \cdot 10^{34}$ ans
60	$60\mu s$	$3.6ms$	$216ms$	36533 ans	$1.34 \cdot 10^{15}$ ans	$2.63 \cdot 10^{68}$ ans

Pourquoi éviter l'exponentielle ? 2/3

- Et si on "boostait" ma machine ?
- Et si on utlisait un serveur de calcul ?
- Et si on parallélisait massivement les calculs ?
- Tout cela aide, et permet effectivement d'aller plus vite.
- Mais pour certains complexités, le gain est minime.

Exemple 1: on multiplie par 1.000 la puissance de calcul: une opération prend 1 nano-seconde (ns)= 10^{-9}s

n/f(n)	n	n^2	n^3	2^n	3^n	$n!$
10	$10ns$	$0.1\mu s$	$1\mu s$	$1\mu s$	$59\mu s$	$3.63ms$
20	$20ns$	$0.4\mu s$	$8\mu s$	$1ms$	3.48 s	$77,1$ ans
40	$40ns$	$1.6\mu s$	$64\mu s$	18.34 h	$385,25$ ans	$2.58 \cdot 10^{31}$ ans
60	$60ns$	$3.6\mu s$	$216\mu s$	$36,5$ ans	$1.34 \cdot 10^{12}$ ans	$2.63 \cdot 10^{65}$ ans

Pourquoi éviter l'exponentielle ? 3/3

Exemple 2: on multiplie par 1.000.000 la puissance de calcul: une opération prend 1 pico-seconde (ps)= 10^{-12}s

n/f(n)	n	n^2	n^3	2^n	3^n	$n!$
10	$10ps$	$0.1ns$	$1ns$	$1\mu s$	$59\mu s$	$3.63ms$
20	$20ps$	$0.4ns$	$8ns$	$1ms$	3.48 ms	28.16 j
40	$40ps$	$1.6ns$	$64ns$	1.1 s	140.71 j	$2.58 \cdot 10^{28}$ ans
60	$60ps$	$3.6\mu s$	$216ns$	13.34 j	$1.34 \cdot 10^{9}$ ans	$2.63 \cdot 10^{62}$ ans

En résumé sur cette partie

Complexité d'un algorithme

- Complexité en mémoire: rarement exponentiel, pas si crucial de nos jours
- Complexité en temps:
  - l'exponentielle guette!
    - si la taille des données est petite et/ou
    - si le problème est "compliqué" à résoudre
  - et on souhaite l'éviter... pour des raisons pratiques (cf. tableaux ci-avant)

Sommaire

Différence entre Algorithme et Problème

Complexité d'un algorithme

- Jusque là: complexité **des algorithmes**
- Càd: étant donné un algorithme A, quelle est sa complexité (en temps) ?

Algorithme vs Problème

- Problème $\leftrightarrow$ question générale
- Algorithme $\leftrightarrow$ une façon de résoudre un problème
- $\Rightarrow$ du coup, que signifie la complexité d'un problème ?

Complexité d'un Problème

La complexité d'un **problème** est la complexité du **meilleur algorithme** qui le résout

Meilleur algorithme = algorithme le plus rapide

Divers types de Problèmes

Les problèmes sont de diverses natures – Exemples

- **Problèmes de calcul**:
  sortie = une ou plusieurs valeur(s) (mais en nombre constant)
  ex: Racines d'un polynôme du second degré
- **Problèmes d'énumération**:
  sortie = un ensemble de réponses
  ex: Recherche de Motif
- **Problèmes d'optimisation**:
  sortie = une valeur à maximiser ou minimiser
  ex: Plus court chemin dans un graphe
- **Problèmes de décision**:
  sortie = oui/non
  ex: p est-il premier ?

Sommaire

Problèmes de Décision et d'Optimisation

Remarque

Dans la suite, nous n'évoquerons que les problèmes **de décision** et **d'optimisation**

Pourquoi ?

- Problèmes de décision (PbD) "simples"... à poser
- Problèmes d'optimisation (PbO) très liés aux PbD – on voit ça bientôt
- Les PbD peuvent sembler limités mais
  1. il y en a déjà beaucoup, et
  2. ce qu'on va dire sur eux est applicable aux autres classes de problèmes

Problèmes de Décision

Réponse = oui/non $\Rightarrow$ L'énoncé est une question

Quelques exemples

- Étant donné un entier n, n est-il premier ?
- Étant donnés deux programmes (informatiques) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont-ils équivalents[1] ?
- Étant donné un programme $\mathcal{P}$, termine-t-il ?
- Étant donné un graphe G et un entier k, peut-on colorier les sommets de G (sans que deux sommets voisins aient la même couleur[2]), en $\leq k$ couleurs ?

[1] càd, pour la même instance d'entrée, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ produisent toujours le même résultat

[2] on parle alors de coloration propre

Coloration de Graphes

- Ce problème sera un peu notre fil rouge
- On colorie les sommets de $G \rightarrow$ on parle de coloration (pas de "coloriage")
- Deux voisins ne peuvent pas avoir la même couleur (on parle de coloration propre)
- On cherche à savoir si k couleurs suffisent

$\rightarrow$ Utile pour des allocations de ressources concurrentes

Coloration de Graphes – Exemple

- Six personnes (nommées a,b,c,d,e et f)
- Réservation de créneaux pour une salle de réunion
- Le même jour

Combien de salles sont-elles nécessaires ?

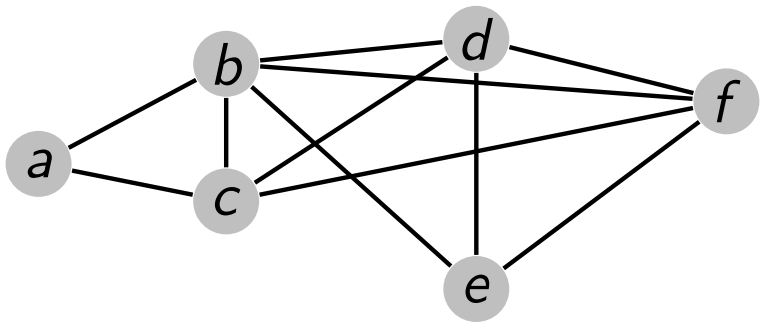
Modélisation par un graphe:

- Sommets: créneaux
- Arêtes: créneaux incompatibles (qui se chevauchent)

Coloration de Graphes – Exemple

Nom du demandeur	a	b	c
Créneau demandé	8h-10h	9h-14h	9h-12h

Nom du demandeur	d	e	f
Créneau demandé	11h-14h	13h-15h	11h-15h



- Coloration propre en k couleurs $\rightarrow$ k salles
- Argument: aucune paire de sommets ayant la même couleur (ex: vert) n'est reliée par une arête
  $\rightarrow$ tout ce qui est vert est compatible
  $\rightarrow$ toutes ces réunions peuvent avoir lieu dans la même salle
- Peut-on colorier ce graphe en 3 couleurs ? en 4 couleurs ? en 5 couleurs ?

Retour sur les Problèmes de Décision

Description standard – Exemples

- Formellement, on décrit un PbD sous la forme suivante :
  - **NOM**: identifie le problème (en majuscule)
  - **Instance**: description des données d'entrée du problème
  - **Question**: la question posée

Problèmes de Décision

Description standard PbD

PREMIER :
Instance : un entier p
Question : p est-il premier ?

k-**COL** :
Instance : un graphe G, un entier k
Question : G peut-il être colorié de façon propre en $\leq k$ couleurs ?

Liens Optimisation/Décision

Optimisation n'est pas décision, mais...

- Tout PbO peut se ramener à un PbD
- "Se ramener" signifie:

Existence d'un Algo Polynomial pour PbO

si et seulement si Existence d'un Algo Polynomial pour PbD

Liens Optimisation/Décision

Illustration sur un exemple

PbO $\leftrightarrow$ PbD

- Le problème de coloration de graphe!
- En réalité, la vraie question est:

  `Étant donné un graphe` G`, quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier` G `de façon propre ?`
- C'est donc (initialement) un problème d'optimisation – appelons-le **MIN-COL**
- Son PbD associé est en réalité k-**COL** (présenté quelques transparents auparavant)

Liens PbO/PbD

Passage d'un PbO à son PbD associé

MIN-COL :
Instance : un graphe G
Question : quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier G de façon propre ?

k-**COL** :
Instance : un graphe G, un entier k
Question : G peut-il être proprement colorié en $\leq k$ couleurs ?

Liens Optimisation/Décision

Montrons l'équivalence Polynomial(PbO) $\Leftrightarrow$ Polynomial(PbD)

Polynomial(PbO) $\Rightarrow$ Polynomial(PbD)

- La résolution de **MIN-COL** donne le nombre c_{opt} de couleurs
- Concernant k-**COL**:
  - Si $c_{opt} \leq k \Rightarrow$ réponse OUI
  - Si $c_{opt} > k \Rightarrow$ réponse NON
- Intuition: trouver la valeur c_{opt} est plus dur que savoir si $c_{opt} \leq k$

Liens Optimisation/Décision

Montrons l'équivalence Polynomial(PbO) $\Leftrightarrow$ Polynomial(PbD)

Polynomial(PbD) $\Rightarrow$ Polynomial(PbO)

- $n =$ nombre de sommets de G
- Remarque: pour tout graphe G, on sait que $1 \leq c_{opt} \leq n$
- En effet:
  - $c_{opt} = 1$ pour un graphe sans arête
  - $c_{opt} = n$ si toutes les arêtes possibles sont présentes
- Idée: répondre à **MIN-COL** en faisant des appels successifs à k-**COL**

Liens Optimisation/Décision

On suppose qu'on a à notre disposition un algorithme `est-coloriable`(G, k), où G est un graphe et k un entier, et qui:

- renvoie VRAI si G peut être proprement colorié en k couleurs
- renvoie FAUX sinon
- est polynomial en la taille des donnés

```
Algorithme min-coloration(G: graphe)

entier i = 0
booléen ok = FAUX

Tant que ok=FAUX faire
   i = i+1
   ok = est-coloriable(G,i)
FinTantQue

retourner i
```

Liens Optimisation/Décision

Polynomial(PbD) $\Rightarrow$ Polynomial(PbO)

- Complexité de `min-coloration` $\leq n\times$ Complexité de `est-coloriable`
- Remarque: on peut faire mieux (dichotomie) $\Rightarrow O(\log n)$ appels à `est-coloriable`

Liens Optimisation/Décision

D'une manière générale

- Algo polynomial pour PbO $\Rightarrow$ Algo polynomial pour PbD: par comparaison entre
  - k = paramètre de PbD
  - c_{opt} = valeur optimale de PbO
- Algo polynomial pour PbD $\Rightarrow$ Algo polynomial pour PbO: recherche dichotomique pour déterminer c_{opt}

Remarques

- On parle de PbD associé à un PbO
- $\Rightarrow$ A partir de maintenant, le plus souvent, nous observerons des **PbD**

Sommaire

Motivations

Savoir où on va !

Il y a des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithmes efficaces (= temps polynomial)

- Diagnostiquer qu'on se trouve confronté à de tels problèmes
- Ne pas chercher un algorithme efficace, mais plutôt
  - réduire ses exigences ou
  - "contourner" le problème

La classe P

P =polynomial

En première approche, deux classes de complexité pour les problèmes:

- La classe P: tous les problèmes pour lesquels il existe un algorithme de complexité polynomiale
- La classe des autres (donc des exponentiels, voire pire...)

La classe P

Définition P

Un PbD appartient à P s'il existe un algorithme A et une constante c, tel que **pour toute instance I** du PbD :

- A résout le PbD en temps polynomial, càd en $O(n^c)$
- où n est la **taille des données**

Problèmes $\in$ P

Exemples de PbO et PbD $\in$ P

- PbO:
  - Problème du Plus Court Chemin (Algorithme de Dijkstra)
  - Problème du PGCD (Algorithme d'Euclide)
- PbD:
  - PREMIER (résultat datant de 2002)
    Voir par exemple
    `https://fr.wikipedia.org/wiki/Test_de_primalité_AKS`

La classe P

En résumé sur P

- Tout PbD $\in$ P est dit facile (ou *tractable*, ou traitable)
- Tout PbD $\notin$ P est dit difficile (ou *intractable*, ou intraitable)

Exemples de PbD $\notin$ P (et même pire que ça!)

- Terminaison des programmes
- Équivalence des programmes

La classe P

Facile ou difficile ?

Problème dans P ou pas dans P ? Pas toujours simple...

- Si le problème $\in$ P:
  - fournir un algorithme
  - montrer qu'il est correct
  - montrer qu'il est polynomial en la taille des données
- Si le problème $\notin$ P:
  - montrer qu'**aucun** algorithme polynomial n'existe!
  - en général très compliqué

P or not P?

Quand on ne sait pas...

- Pour beaucoup de PbD, on ne sait pas:
  - aucun algo polynomial connu $\Rightarrow$ tous sont exponentiels...
  - ...mais aucune preuve que le PbD $\notin$ P !
- Idée: inventer une classe intermédiaire: NP

ATTENTION

NP veut dire Nondeterministic Polynomial

NP **ne veut pas dire NON POLYNOMIAL !**

Retour à la classe NP

Définition NP

PbD $\in$ NP si:

- pour chaque instance positive I (càd: réponse OUI)
- il existe un certificat $C(I)$ (de sa positivité) vérifiant:
  1. taille de $C(I)$: **polynomiale** en la taille des données de PbD
  2. vérification à partir de $C(I)$: en temps **polynomial**

NP– Intuitivement

Coloration de graphe

- j'ai un graphe G et un entier k (une instance I)
- je me demande si G peut être proprement colorié en $\leq k$ couleurs
- quelqu'un observe par-dessus mon épaule, réfléchit et répond "oui" (instance positive)
- je doute: je lui demande une "preuve" (certificat $C(I)$)
- je vérifie, sur la base de sa "preuve", qu'il dit vrai
- si la taille de $C(I)$ et l'algorithme de vérification sont polynomiaux (en la taille des données), le problème est dans NP

La classe NP

Autrement dit

- NP = classe des PbD pour lesquels il est "facile" de vérifier qu'une réponse fournie est correcte
- vérifier, pas trouver
- Les exigences sont donc diminuées → on peut mettre davantage de PbD dans NP

- PbD ∈ P ↔ solution facile à trouver
- PbD ∈ NP ↔ solution facile à vérifier

La classe NP

Problème k-**COL**

- Instance: un graphe G, un entier k
- Question: G peut-il être proprement colorié en $\leq k$ couleurs ?

Montrons que k-**COL**$\in$ NP :

- Certificat (pour toute instance I) ? dictionnaire sommet $\leftrightarrow$ couleur pour chacun des n sommets de G
- Taille du certificat ? $O(n)$, donc polynomial
- Vérification :
  1. nombre de couleurs $\leq k$: $O(n)$
  2. chaque sommet a exactement une couleur : $O(n)$
  3. deux sommets voisins dans G n'ont pas la même couleur : $O(n^2)$
- Taille et vérification polynomiales $\Rightarrow$ k-**COL**$\in$ NP

La classe NP

NP, et alors ?

Remarque: PbD$\in$ P $\Rightarrow$ PbD$\in$ NP:

- trouver est plus dur que vérifier
- si trouver est facile, alors vérifier l'est aussi
- $\Rightarrow$ P $\subseteq$ NP

Que faire maintenant avec la classe NP ?

- But: comparer les problèmes $\in$ NP entre eux
- et surtout, identifier les plus difficiles de NP

$\Rightarrow$ notion de **réduction d'un problème vers un autre**

Réduction d'un problème vers un autre

Définition – Réduction

- Soit Pb_d et Pb_a deux PbD (d pour départ, a pour arrivée)
- Réduction de Pb_d vers Pb_a veut dire:
  - partant de **toute** instance I_d de Pb_d...
  - ...on peut créer en temps polynomial **une** instance I_a de Pb_a
  - de façon que I_d et I_a ont la même réponse (OUI ou NON)
- On écrira $Pb_d \geq_{\mathrm{P}} Pb_a$ (Pb_d se réduit en temps polynomial vers Pb_a)

Réduction

Idée principale

But: comparer les PbD de NP entre eux

En effet, si $Pb_d \geq_{\mathrm{P}} Pb_a$, alors:

- Si Pb_a est dans P, alors Pb_d l'est aussi (car on peut résoudre Pb_d en "passant par" Pb_a)
- $\Rightarrow$ $\boldsymbol{Pb_a}$ est au moins aussi difficile que $\boldsymbol{Pb_d}$

Les problèmes NP-complets

NP + réduction $\Rightarrow$ les problèmes les plus difficiles de NP

Nouvelle classe: NP-complet

Définition NP-complet

Un PbD est NP-complet si :

1. il est dans NP
2. chaque problème de NP peut se réduire vers lui

Abus de langage: on dit "est NP-complet" au lieu de $\in$ NP-complet

Astuce

- Vous avez bien dit "**chaque** problème NP peut se réduire..."!!!
- Question: comment fait-on ?
- Réponse: ci-dessous

Pour montrer qu'un PbD Pb est NP-complet, il "suffit" de montrer:

1. $Pb \in \text{NP}$
2. il existe **un** PbD NP-complet Pb_1 tel que $Pb_1 \geq_{\text{P}} Pb$

Dit autrement:

- **une seule** réduction suffit
- mais il faut réduire depuis un problème NP-complet
- (ça se démontre assez simplement – mais pas ici!)

Les problèmes NP-complets

En conclusion

- Un PbD NP-complet est un problème NP au moins aussi difficile que tout autre problème NP
- Les PbD NP-complets sont les problèmes **les plus difficiles de** NP

Sommaire

L'œuf et la poule

Montrer qu'un PbD est NP-complet implique de réduire un problème NP-complet vers lui... mais il faut bien commencer quelque part!

Remarque

Il n'est a priori pas évident qu'il existe au moins un problème NP-complet

Theorem (Cook 1971)

Le problème **SAT** *est* NP-*complet*

- **SAT** est un problème de logique booléenne
- Démontré via la machine de Turing

L'œuf et la poule

- Depuis 1971, c'est les soldes: les réductions pleuvent!
- $\rightarrow$ les PbD NP-complets sont **nombreux** !
- Par exemple:
  - k-**COL** est NP-complet pour tout $k \geq 3$
  - le problème du Sac à Dos est NP-complet
  - le problème de Rendu de Monnaie est NP-complet

L'œuf et la poule

Pour aller plus loin:

`https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_problèmes_NP-complets`

et aussi la "bible" dans le domaine:

"Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness" de Garey et Johson
Paru en 1979
Qui liste plus de 300 problèmes NP-complets

Attention à NP-complet!

Ce que veut dire NP-complet

Un PbD est NP-complet veut dire:

- qu'il existe au moins une instance "compliquée à résoudre"
- mais pas forcément toutes !!!
- des cas particuliers (potentiellement nombreux) peuvent être polynomiaux
- ...on en parle un peu plus tard

Sommaire

Pour revenir à la classe NP-complet

A quoi ça peut bien servir ?

1. Si un seul PbD NP-complet est polynomial $\Rightarrow$ tous les problèmes NP aussi !
2. Inversement, si un seul PbD NP est intraitable $\Rightarrow$ tous les problèmes NP-complets aussi !

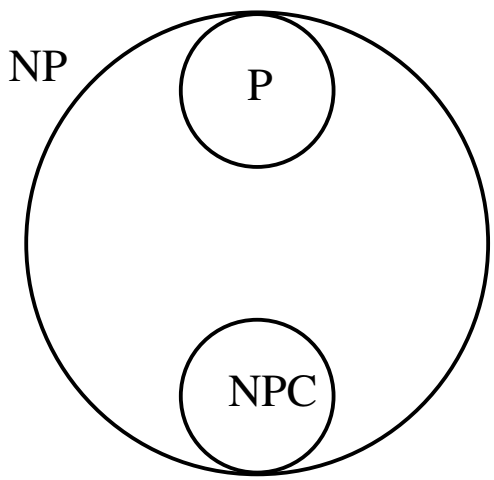
Quelques propriétés des NP-complets

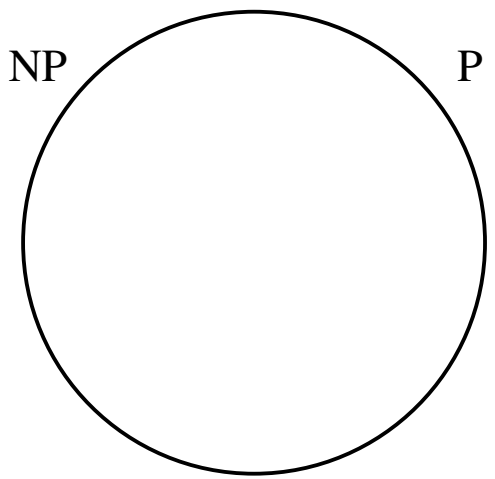
Problèmes NP-complets: où en est-on ?

- Problèmes tous très difficiles à résoudre
- Aucun algorithme polynomial n'a été trouvé pour ces problèmes
- L'impossibilité de trouver des algorithmes polynomiaux n'a pas été prouvée non plus !
- L'existence ou non d'algorithmes polynomiaux pour les problèmes NP-complets est l'un des plus grands problèmes encore ouverts en informatique

Relations entre P et NP ...

- Les problèmes NP-complets sont les problèmes les plus difficiles de la classe NP
- $P \subseteq NP$
- mais qu'est-ce qui est correct ? le schéma de gauche, ou celui de droite ?





La grande question

P =NP?

- Recherches innombrables sur le sujet depuis des dizaines d'années
- Fait partie des 7 problèmes du millénaire du Clay Mathematics Institute
  `http://www.claymath.org/millennium-problems`
  Remarque: 1 million de dollars par problème résolu
- Les implications sont multiples et réelles ! Exemple: transactions bancaires cryptées sur le web (codage RSA)
- On ne sait toujours pas:
  - si les PbD $\in$ NP sont tous polynomiaux...
  - ou si les problèmes NP-complets sont exponentiels

La grande question

P =NP?

L'opinion généralement partagée est que P $\subset$ NP, càd les problèmes NP-complets ne sont pas polynomiaux

Concrètement

Que faire face à un problème inconnu ?

On observe notre problème *Pb*

- soit on pense que le problème *Pb* est **facile**
  $\Rightarrow$ on cherche un algorithme *correct* et polynomial (avec le meilleur temps possible!) qui le résout
- soit on pense que le problème *Pb* est **difficile**
  $\Rightarrow$ on cherche à montrer qu'il est NP-complet, càd
  - toute solution proposée peut être polynomialement **vérifiable** (appartenance à NP)
  - prendre un problème NP-complet et le **réduire** polynomialement à *Pb*

Que faire face à un problème Polynomial ?

Si *Pb* est polynomial

- Trouver le "meilleur" algorithme
- S'assurer qu'il est correct!
- Meilleur = le plus rapide

Exemple: le problème du Tri

Que faire face à un problème NP-complet?

Si *Pb* est NP-complet

- Premier constat: ne pas s'acharner à trouver un algorithme exact et rapide qui fonctionne sur toutes les instances
- Baisser ses exigences:
  (a) soit sur la **rapidité** d'exécution
  Je veux la réponse exacte, je suis prêt.e à attendre (si la taille est petite, ça ira)
  (b) soit sur l'**exactitude** de la réponse
  Je veux une réponse rapide, tant pis si elle n'est pas tout à fait exacte
  (c) soit sur l'**ensemble des instances** autorisées
  Je peux avoir un algorithme rapide et exact si mes données d'entrée sont "gentilles"

Que faire face à un problème NP-complet?

Discussion

- La très grande majorité des PbO/PbD "intéressants" sont NP-complets
- Le problème de décision $\mathcal{P}$ est NP-complet signifie que:
  1. Il existe au moins une instance de $\mathcal{P}$ qui est difficile à résoudre
  2. Il n'existe pas d'algorithme polynomial (en temps) pour résoudre $\mathcal{P}$ (sauf si P = NP)
  3. $\mathcal{P}$ est au moins aussi difficile que les problèmes **SAT**, **MIN-COL**, **SAC A DOS**, **RENDU DE MONNAIE**, ...
- En l'état actuel des connaissances:
  - résultat optimal $\Rightarrow$ temps d'exécution déraisonnable
  - temps d'exécution raisonnable $\Rightarrow$ résultat pas optimal

Que faire face à un problème NP-complet?

Retour sur le cas (c)

Je peux avoir un algorithme rapide et exact si mes données d'entrée sont "gentilles"

- NP-complet signifie qu'au moins une instance est "difficile"...
- ...mais pas forcément toutes !
- Pour certaines instances, le problème (pourtant NP-complet) pourrait être résolu en temps polynomial
- Exemples:
  - **MIN-COL** limité aux graphes de degré maximum 2
  - **MIN-COL** limité aux arbres

MIN-COL limité aux graphes de degré maximum 2

MIN-COL limité aux graphes de degré maximum 2 :
Instance : un graphe G de degré maximum 2
Question : quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier G de façon propre ?

Exercice

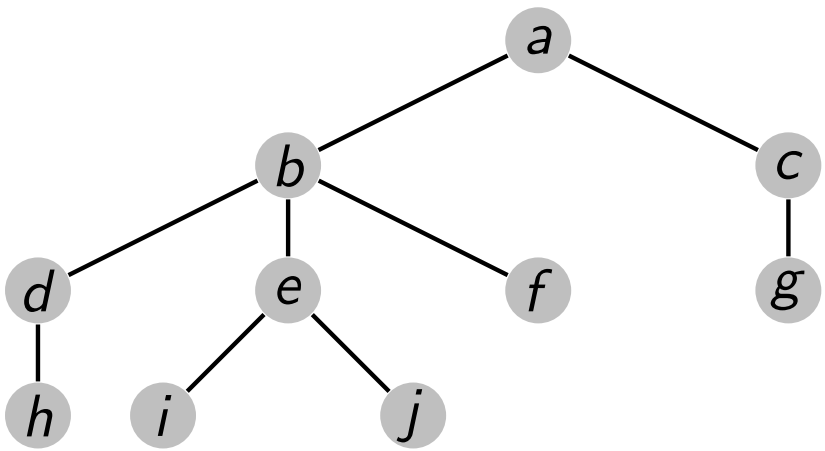
- Si G est connexe et de degré max. 2, à quoi ressemble G ?
- Si G n'est pas (forcément) connexe, à quoi ressemble-t-il ?
- Montrer que le problème **MIN-COL** limité aux graphes de degré max. 2 est dans P

MIN-COL limité aux arbres

MIN-COL :

Instance : un arbre G

Question : quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier G de façon propre ?



Exercice

Montrer que le problème **MIN-COL** limité aux arbres est dans P

Que faire face à un problème NP-complet?

Retour sur le cas (b)

Je veux une réponse rapide, tant pis si elle n'est pas tout à fait exacte

- S'applique surtout aux PbO
- temps d'exécution exigé: polynomial
- Une possibilité: Algorithmes d'approximation:
  - algorithme polynomial
  - garantissant un résultat $\leq r \cdot c_{opt}$ (maximisation) ou $\geq r \cdot c_{opt}$ (minimisation)
  - pour toutes les instances
  - r est appelé le ratio d'approximation

Retour sur le problème du **SAC A DOS**

Théorème

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un algorithme de $(1-\varepsilon)$-approximation pour **SAC A DOS**, *et dont la complexité en temps est en* $O(N^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon})$

Rappels:

- $N =$ nombre d'éléments
- Ici, ratio $r = 1 - \varepsilon$, où ε est aussi petit que l'on veut (avec $\varepsilon > 0$, tout de même...)

Discussion:

- c'est le cas le plus favorable (compromis qualité du résultat/temps d'exécution)
- utilise l'algorithme de Prog. Dynamique (sur une instance "divisée") – tout n'est pas perdu!

Approximation pour **SAC A DOS**

Les grandes idées

Partant d'une instance I:

- diviser les valeurs par un même facteur X pour diminuer l'échelle sur ces valeurs
- arrondir $\rightarrow$ instance I'
- utiliser l'algo de Prog. Dyn. sur I'
- remonter la solution (exacte) pour I' vers une solution (approchée) pour I

Sommaire

Résumé en quelques transparents

Taille des Données

- En général, ne pose pas de problèmes
- Rester attentif aux problèmes ayant en entrée:
  - un nombre constant de valeurs (ex: **PREMIER**, **PGCD**)
  - des valeurs "cruciales" pour résoudre le problème (ex: **SAC A DOS**, **RENDU DE MONNAIE**)

Résumé en quelques transparents

Complexité des Problèmes

- Tout une théorie existe (seulement effleurée ici)
- Permet d'estimer la difficulté des problèmes (P vs NP-complet)
- Si le problème est NP-complet, on adapte sa stratégie de résolution
- Le catalogue d'algorithmes est immense
  - heuristiques
  - algorithmes d'approximation
  - algorithmes probabilistes
  - algorithmes de complexité paramétrée
  - programmation linéaire
  - programmation par contraintes
  - apprentissage automatique
  - etc.